Taylorův rozvoj funkce jedné a dvou proměnných

Úvod

Taylorův rozvoj používáme, chceme-li nějakou složitou funkci $f(x)$ nahradit mnohočlenem (polynomem) $T_n(x)$ stupně n. Důvodem může být i to, že funkci vlastně ani nemáme zadanou nějakým výrazem (vzorečkem), protože je to řešení diferenciální rovnice, kterou neumíme vyřešit, nebo proto, že je zadána implicitně.

Taylorův rozvoj je vlastně lokální aproximace. Aproximace znamená, že výsledný mnohočlem dává hodnoty blízké původní funkci, nikoliv přesně stejné (až na vyjímečné případy). Lokální znamená, že hodnoty jsou blízké pouze na nějakém malém intervalu nezávisle proměnné, říkáme na nějakém okolí bodu x_0, ve kterém rozvoj počítáme.

Stupeň n mnohočlenu $T_n(x)$ se nazývá řád aproximace. Počet členů mnohočlenu je o jedničku větší než jeho řád, protože obsahuje i absolutní člen (člen bez proměnné). Podmínkou je, aby funkce měla derivace do tohoto řádu, protože od mnohočlenu $T_n(x)$ požadujeme, aby se v bodě x_0 shodoval s danou funkcí $f(x)$ ve funkční hodnotě a v derivacích do tohoto řádu.

Taylorův rozvoj funkce jedné proměnné

Z této podmínky plyne

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Např pro $n = 2$, tedy pro rozvoj do druhého řádu dostaneme

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Taylorův rozvoj lze v systému Maple počítat příkazem `taylor`. Tento příkaz zavoláme se dvěma nebo třemi argumenty, uzavřenými v kulatých závorkách a oddělenými čárkou:

- první argument je funkce, kterou rozvádíme,
- druhý argument je proměnná, příp. následovaná rovnítkem a hodnotou, ve které rozvádíme (je-li nenulová),
- třetí argument (je-li uveden) určuje počet členů rozvoje; není-li uveden, je počet členů rozvoje 6, tedy řád rozvoje je 5.

Ukážeme si to na příkladech. Např rozvoj funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

v bodě $x_0 = 0$ do pátého řádu najdeme příkazem

```
>  taylor(exp(x),x);
```

$$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

Požadujeme-li jiný počet členů rozvoje, např. 8, použijeme příkaz

```
>  taylor(exp(x),x,8);
```

$$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5 + \frac{1}{720}\,x^6 + \frac{1}{5040}\,x^7 + \mathrm{O}(x^8)$$

Chceme-li rozvoj ne v bodě $x_0 = 0$, ale např. v bodě $x_0 = 2$, použijeme příkaz (pro 3 členy)

```
>  taylor(exp(x),x=2,3);
```

$$e^2 + e^2\,(x-2) + \frac{1}{2}\,e^2\,(x-2)^2 + \mathrm{O}((x-2)^3)$$

Pozor, ta čárka neodděluje jednotky od desetin, k tomu se používá tečka, ale odděluje argumenty příkazu `taylor`.

Poslední člen výsledku značí tzv. zbytek, tedy rozdíl mezi přesnou hodnotou funkce a hodnotou mnohočlenu. Lze se jej zbavit příkazem `convert`

```
>  convert(%,polynom);
```

$$e^2 + e^2\,(x-2) + \frac{1}{2}\,e^2\,(x-2)^2$$

Taylorův rozvoj funkce dvou proměnných

Pro rozvoj funkce dvou (či více) proměnných lze použít příkaz `mtaylor`. Písmenko m je z anglického slova multiple (násobný). Druhý argument nyní bude seznam proměnných uzavřený v hranatých závorkách. Např. rozvoj funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$$

v bodě $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ dostaneme příkazem

```
> mtaylor(exp(x*y),[x,y]);
```

$$1 + x\,y + \frac{1}{2}\,y^2\,x^2$$

Bod, ve kterém rozvádíme, a řád lze zadat obdobně jako pro rozvoj funkce jedné proměnné, např.

```
> mtaylor(exp(x*y),[x=2,y=1],3);
```

$$e^2 + e^2\,(x-2) + 2\,e^2\,(y-1) + \frac{1}{2}\,e^2\,(x-2)^2 + 3\,e^2\,(y-1)\,(x-2) + 2\,e^2\,(y-1)^2$$

Všimněte si, že výstup příkazu `mtaylor` neobsahuje (na rozdíl od výstupu příkazu `taylor`) zbytek. Tím si autoři systému Maple zjednodušili práci na úkor logické jednoty a krásy.